Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi
Sayı 41, S. 492-498, Kasım 2022
© Telif hakkı EJOSAT'a aittir
Araştırma Makalesi

www.ejosat.com ISSN:2148-2683

European Journal of Science and Technology
No. 41, pp. 492-498, November 2022
Copyright © 2022 EJOSAT
Research Article

On Fermat Point in CC-Plane

Ziya Akça[1*], Barış Tözen[2]

[1*] Eskişehir Osmangazi University, Faculty of Science, Departmant of Mathematics and Computer, Eskişehir, Turkey, (ORCID: 0000-0001-6379-0546), zakca@ogu.edu.tr

[2] Eskişehir Osmangazi University, Faculty of Science, Departmant of Mathematics and Computer, Eskişehir, Turkey, (ORCID: 0000-0002-4522-2171), btozen@hotmail.com

(First received 26 October 2022 and in final form 30 November 2022)

(**DOI:** 10.31590/ejosat.1195040)

ATIF/REFERENCE: Akça, Z. & Tözen, B. (2022). On Fermat Point in CC-Plane. *European Journal of Science and Technology*, (41), 492-498.

Abstract

In this paper, the properties related to Fermat point of a triangle in the planes equipped with Taxicab and Chinese checkers metrics are examined and examples are presented.

Keywords: Taxicab plane, Chinese Checkers plane, Fermat point

Çin Dama Düzleminde Fermat Noktası

Öz

Bu makalede, Taksi ve Çin daması metrikleri ile donatılmış düzlemlerde bir üçgenin Fermat noktası ile ilgili özellikler incelenmiş ve örnekler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Taksi Düzlem Geometri, Çin Dama Düzlemi. Fermat Noktası

* Corresponding Author: zakca@ogu.edu.tr

1. Giriş

Fransız matematikçi Pierre de Fermat' ın "Bir üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamı en az olan nokta neresidir?" sorusunu İtalyan fizik ve matematik bilgini Evangelista Torricelli ye sormuştur. İkili, yaptığı çalışmalar sonucu bir üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamının en az üçgenin çevre uzunluğunun yarısı ve en fazla da çevre uzunluğu kadar olduğunu bulmuşlardır. Fermat(Toriçelli) noktası Simpson 1750 tarafından da araştırılmıştır.

Taksi ve Çin Dama gibi Öklidyen olmayan metriklerin bulunması ve geliştirilmesiyle beraber Fermat noktası ile ilgili çalışmalar bu yönde ilerlemiş ve Taksi metrikle donatılmış düzlemlerde Fermat noktası araştırılmıştır. H. Minkowski 1967 Öklidyen ve taksi metriği gibi metrikleri de içine alan bir metrik ailesi tanımlamıştır. Menger 1952 Taksi düzlemi tanımlamıştır ve E.F. Krause 1965 Öklidyen metrikteki kavramların Taksi metriğindeki karşılıklarını araştırdığı bir kitap yayınlamıştır. Sonraki yıllarda Taksi düzlem ve Taksi uzay ile ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları (Akça ve Kaya, 1997, Akça ve Kaya, 2004, Kaya vd. 2000, Özcan vd., 2002) olarak verilebilir.

Taksi metriği ile verilen düzlemdeki üçgenin Fermat noktasının, üçgenin köşelerinden çizilen yatay ve dikey doğruların üçgenin iç bölgesinde kesiştiği nokta olduğunu Hanson 2014 belirtmiştir.

Taksi ve Çin dama düzlemlerinin nokta ve doğruları Öklidyen analitik düzlemin nokta ve doğruları ile aynıdır. Açılar da aynı şekilde ölçülürken, uzaklık fonksiyonları farklıdır.

2. Metaryal ve Metod

Tanım 1 Düzlemde verilen P = (x_1, y_1) ve Q = (x_2, y_2) noktaları arasındaki Öklidyen uzaklık

$$d_E(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2 Düzlemde verilen P = (x_1, y_1) ve Q = (x_2, y_2) noktaları arasında

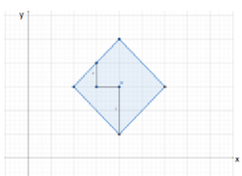
$$d_T(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

ile Menger ve Krause tarafından kullanılan d_T fonksiyonuna P ve Q noktaları arasındaki Taksi uzaklık fonksiyonu denir.

Tanım 3 Düzlemde merkezi M = (a, b) ve yarıçapı r olan taksi çemberi

$$C = \{(x, y) : |x - a| + |y - b| = r;\ x, y \in R\}$$

şeklinde tanımlıdır.



Şekil 1Taksi Çemberi

Tanım 4 Taksi düzlemde ℓ...ax + by + c = 0 doğrusu verilsin. ℓ doğrusuna,

I) $\left|-\frac{a}{b}\right| > 1$ ise dikeysel doğru,

II) $\left|-\frac{a}{b}\right| < 1$ ise yataysal doğru,

III) $\left|-\frac{a}{b}\right| = 1$ ise ayıraç doğru,

denir.

Tanım 5 Taksi düzlemde bir P (x_1, y_1) noktasının denklemi ax + by + c = 0 olan ℓ doğrusuna uzaklığı, P'nin ℓ doğrusu üzerindeki noktalara uzaklıklarından en küçüğü olarak tanımlanır ve bu uzaklık

$$d_T(P,\ell) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\max\{|a|,|b|\}}$$

formülü ile hesaplanır.

Tanım 6 Taksi düzlemde herhangi verilen A ve B noktaları için
$$d_T(A,X) + d_T(X,B) = d_T(A,B)$$

Özelliğindeki tüm X noktalarının kümesine A ve B noktalarının en kısa uzaklık kümesi denir.

Krause 1965 "Çin Dama oyunundaki hareketlerden yola çıkarak bir metrik geliştirilebilir mi?" sorusunu sormuştur.

Çin Dama geometrisi CC-geometri olarak kısaltılır ve Öklidyen olmayan bir düzlem modelidir. Sonraki yıllarda pek çok matematikçi Çin Dama geometri üzerine çalışmıştır. (Turan 2004, Akça, Bayar ve Ekmekçi 2007) bu çalışmalardan bazılarıdır.

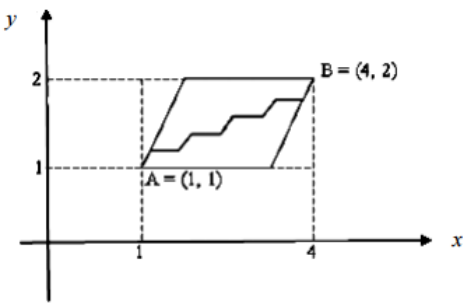
Tanım 7 Analitik düzlemde verilen P=(x_1, y_1) ve Q=(x_2, y_2) noktaları arasında

$$d_c(P,Q) = d_l(P,Q) + \left(\sqrt{2} - 1\right) d_s(P,Q)$$

$$d_l(P,Q) = \max\{\ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\ \}$$

$$d_s(P,Q) = \min\ \{\ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\ \}$$

olarak tanımlanan d_c fonksiyonuna P ve Q noktaları arasındaki Çin Dama uzaklık fonksiyonu adı verilir. Şekil 2 de iki nokta arasındaki Çin Dama uzaklığı gösterildi.



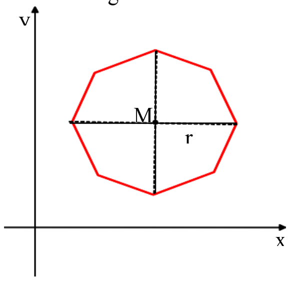
Şekil 2 CC-uzaklığı

Tanım 8 Çin Dama düzleminde sabit bir noktadan sabit bir CC-uzaklıktaki noktaların geometrik yerine Çin Dama (CC) çemberi denir. Sabit noktaya CC-çemberin merkezi, sabit CC-uzaklığa da çemberin yarıçapı adı verilir.

Analitik düzlemde M = (m_1,m_2) noktasına, r birim CC-uzaklığında bulunan bütün noktalar

$$C = \{X = (x, y) : d_c(M, X) = r\}$$

kümesi M merkezli, r yarıçaplı CC-çemberidir. Şekil 3 de olduğu gibi Çin Dama çemberi bir sekizgendir.



Şekil 3 Çin Dama Çemberi

Tanım9 Çin Dama düzlemindeki herhangi bir $P = (x_1,y_1)$ noktasının

$ax + by + c = 0$ denklemli ℓ doğrusuna Çin dama uzaklığı, $d_c(P,\ell)$:$X\in\ell$ olmak üzere, $d_c(P,X)$ değerinin en küçük olması durumu yani

$$d_c(P,\ell) = \min_{x\in\ell} d_{c(x,P)}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 10 Çin Dama düzleminde ℓ… $ax + by + c = 0$ doğrusu verilsin. ℓ doğrusu ve $q = \sqrt{2} - 1$

I) $\left|-\frac{a}{b}\right| < 1$ olan doğru, yataysal doğru,

II) $\left|-\frac{a}{b}\right| > 1$ olan doğru, dikeysel doğru,

III) $\left|-\frac{a}{b}\right| = 1$ olan doğru, ayıraç doğru,

IV) $\left|-\frac{a}{b}\right| = q$ olan doğru, q – doğru

V) $\left|-\frac{a}{b}\right| = q + 2$ olan doğru (q + 2) – doğru

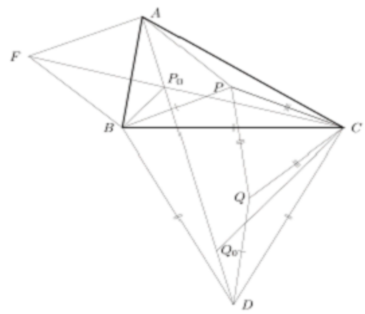
olarak adlandırılır.

3. Fermat Noktası

Fransız matematikçi Pierre de Fermat 1640 lı yıllarda "Bir ABC üçgeninin köşe noktalarına olan uzaklıkları toplamı en az olan nokta neresidir?" sorusunu sordu. Daha sonra bu sorunun cevabı 1750 li yıllarda araştırıldı. Bununla birlikte daha sonraki yıllarda bu soruya basit bir çözüm getirmişlerdir.

Hanson 2014, "Büyük bir kentte yolların kuzey-güney, doğu-batı yönünde neredeyse dikdörtgen benzeri bir ağ şeklinde düzenlendiğini varsayalım. Konumları itibariyle her biri bir üçgenin köşesine karşılık gelen üç ayrı merkeze mal taşımak üzere bir depo inşa etmek istesek, depodan merkezlere toplam uzaklığın minimum olduğu nokta neresi olmalıdır?" sorusunun cevabını bulmak için Taksi düzlemde Fermat noktasını araştırmıştır. Hanson 2016, bir üçgenin Fermat noktasını bulmak için bir noktayı yatay ve dikey doğrultuda ötelemiş ve üçgenin köşe noktalarına uzaklıkları toplamlarını hesaplamıştır. Fermat noktasını (P noktası) üçgenin köşeleri ile birleştirildiğinde, Fermat noktasında oluşan tam açıyı üç eş parçaya böldüğü görüldü.

$$m(\widehat{APB}) = m(\widehat{APC}) = m(\widehat{CPB}) = 120^0$$

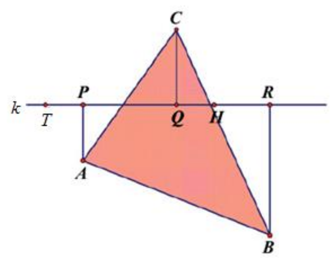


Şekil 4 Fermat Noktası

4. Taksi Düzlemde Fermat Noktası

Teorem 1 Taksi düzlemindeki bir üçgenin Fermat noktası, o üçgenin köşe noktalarından geçen yatay ve dikey doğruların üçgenin iç bölgesinde kesiştiği noktadır. Hanson 2014.

İspat Taksi düzlemde bir ABC üçgeni verilsin. Bu üçgeni kesen şekil 5 deki gibi yatay (k) ve şekil 6 deki gibi dikey (m) doğruları alınarak bu doğrular üzerinde Fermat noktasını bulmak için, köşelere uzaklıkları toplamı minimum olan nokta belirlenmelidir.



Şekil 5 Taksi Üçgende Fermat Noktası

k doğrusu üzerindeki T noktası için;

$s = |AT| + |BT| + |CT| = (|TP| + |PA|) + (|TP| + |PQ| + | QR| + |RB|) + (|TP| + |PQ| + |QC|)$

$= |TP| + |PA| + 2|TP| + 2|PQ| + | QR| + |RB| + |QC|$

Bu doğru üzerindeki P noktası için;

$s = |AP| + |BP| + |CP| = |AP| + (|PQ| + |QR| + |RB|) + (|PQ| + |QC|)$

$= |AP| + 2|PQ| + |QR| + |RB| + |QC|$

T noktasından P noktasına kadar üçgenin köşelere olan s uzaklığının 3|TP| kadar kısaldığı görülür.

Bu doğru üzerindeki Q noktası için;

s = |AQ| + |BQ| + |CQ| = (|AP| + |PQ|) + (|QR| + |RB|) + |CQ|

Bu durumda Q noktası için s uzaklığı P noktasına göre |PQ| kadar azalır.

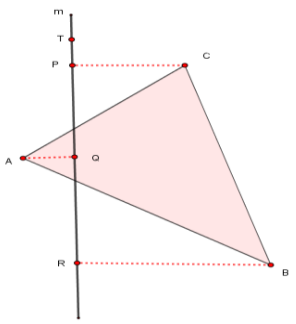
Bu doğru üzerindeki R noktası için;

s = |AR| + |BR| + |CR| = (|RQ| + |QP| + |AP|) + |BR| + (|RQ| + |QC|)

= 2|RQ| + |QP| + |AP| + |BR| + |QC| olduğundan R noktası için s uzaklığı Q noktasına göre |QR| kadar artar.

T noktasından Q noktasına kadar s uzaklığı azalır ve Q noktasından R noktasına kadar s uzaklığı artar. O zaman, k doğrusu üzerinde üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamı en az olan nokta Q noktası olarak bulunur.

Benzer şekilde dikey m doğrusu üzerinde köşelere uzaklıkları minimum olan noktayı bulmak için aşağıdaki durumlar incelenir:



Şekil 6 Taksi Üçgende Fermat Noktası

Bu doğru üzerindeki T noktası için;

s = |AT| + BT| + |CT| = (|TP| + |PQ| + |QA|) + (|TP| + |PQ| + |QR| + |RB|) + (|TP| + |PC|)

= 3|TP| + 2|PQ| + |QA| + |QR| + |RB| + |PC|

Bu doğru üzerindeki P noktası için;

s = |AP| + |BP| + |CP| = (|PQ| + |QA|) + (|PQ| + |QR| + |RB|) + |CP|

= 2|PQ| + |QA| + |QR| + |RB| + |CP|

Bu durumda P noktası için T noktasına göre s uzaklığı 3|TP| kadar azalır.

Bu doğru üzerindeki Q noktası için;

s = |AQ| + |BQ| + |CQ| = |AQ| + (|QR| + |RB|) + (|QP + |PC|)

= |AQ| + |QR| + |RB| + |QP + |PC|

Bu durumda Q noktası için P noktasına göre s uzaklığı 2|PQ| kadar azalır.

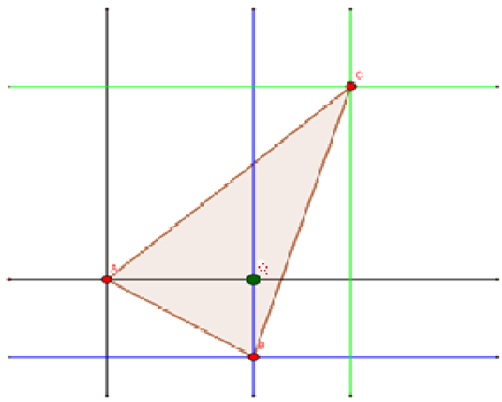
Bu doğru üzerindeki R noktası için;

s = |AR| + |BR| + |CR| = (|AQ| + |QR|) + |BR| + (|CP| + |PQ| + |QR|)

= |AQ| + 2|QR| + |BR| + |CP| + |PQ| olduğundan R noktası için Q noktasına göre s uzaklığı |QR| kadar artar.

T noktasından Q noktasına kadar s uzaklığı azalır, Q noktasından R noktasına kadar s uzaklığı arttığından k doğrusu üzerinde üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamı en az olan nokta Q noktası olarak bulunur.

A ’dan geçen yatay k doğrusunun C ’den geçen dikey m doğrusu ile kesiştiği Q noktası ABC üçgeninin Fermat noktası olarak bulunur.

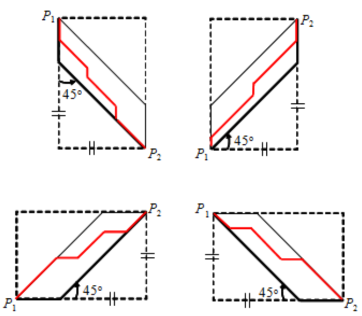


Şekil 7 Taksi Üçgende Fermat Noktası

Şekil 7 de olduğu gibi ABC Taksi üçgeninde Fermat noktası P noktası olarak bulunur.

5. Çin Dama Düzlemde Fermat Noktası

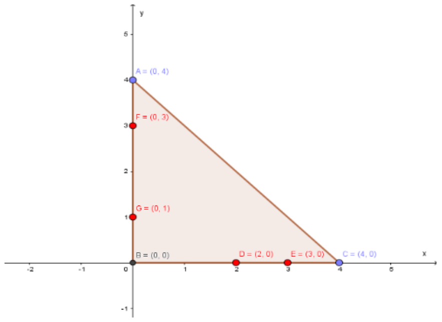
Geometrik olarak, P_1 ile P_2 noktaları arasındaki en kısa yol Şekil 8 de görüldüğü gibi biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğeri 1 veya -1 eğimli iki doğru parçasının birleşimidir. Böylece P_1 ile P_2 arasındaki en kısa uzaklık ifade edilen şekildeki iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamıdır. P_1 den P_2 ye olan yolların birleşimi, yani P_1 ile P_2 noktalarının minimum uzaklık kümesi Şekil 8 de görüldüğü gibi bir kenar çifti koordinat eksenlerinden birine paralel, diğer kenar çifti ise diğer koordinat ekseni ile 45^0 lik açı yapan paralelkenardır.



Şekil 8 Çin Dama yolları

Bu bölümde örneklerle bir üçgenin Çin daması metriğine göre Fermat noktası incelenmektedir.

Örnek 1. Çin Dama düzlemde köşe noktaları A(0,4), B(0,0) ve C(4,0) olan ABC üçgeni verilsin.



Şekil 9 Çin Dama Üçgeninde Fermat Noktası

ABC üçgeninin Çin dama metriğine göre Fermat noktasını bulmak için üçgen içinde Çin dama yollarının köşelere Çin dama uzaklıkları toplamı en az olan nokta belirlenmelidir.

Seçilen D(2,0) noktası için;

$|AD| = 4 + 2(\sqrt{2} - 1) = 2 + 2\sqrt{2}$

$|BD| = 2 + 0(\sqrt{2} - 1) = 2$

$|CD| = 2 + 0(\sqrt{2} - 1) = 2$

$s = |AD| + |BD| + |CD| = 6 + 2\sqrt{2}$,

E(3,0) noktası için;

$|AE| = 4 + 3(\sqrt{2} - 1) = 1 + 3\sqrt{2}$

$|BE| = 3 + 0(\sqrt{2} - 1) = 3$

$|CE| = 1 + 0(\sqrt{2} - 1) = 1$

$s = |AE| + |BE| + |CE| = 5 + 3\sqrt{2}$,

B(0,0) noktası için;

$|AB| = 4 + 0(\sqrt{2} - 1) = 4$

$|BB| = 0$

$|CB| = 4 + 0(\sqrt{2} - 1) = 4$

$s = |AB| + |BB| + |CB| = 8$,

Seçtiğimiz B, D, E noktalarının üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamı bulunur.

$6 + 2\sqrt{2} - (5 + 3\sqrt{2}) < 0$ olduğundan D noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı E noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamından daha azdır.

$8 - (6 + 2\sqrt{2}) < 0$ olduğundan B noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı D noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamından daha azdır.

Buna göre B noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı D ve E noktalarının köşelere olan uzaklıkları toplamından azdır. Dolayısıyla ABC üçgeninin Çin Daması metriğine göre Fermat noktasının apsisi 0 dır.

Seçilen F(0,3) noktası için;

$|AF| = 1 + 0(\sqrt{2} - 1) = 1$

$|BF| = 3 + 0(\sqrt{2} - 1) = 3$

$|CF| = 4 + 3(\sqrt{2} - 1) = 1 + 3\sqrt{2}$

$s = |AF| + |BF| + |CF| = 5 + 3\sqrt{2}$,

G(0,1) noktası için;

$|AG| = 3 + 0(\sqrt{2} - 1) = 3$

$|BG| = 1 + 0(\sqrt{2} - 1) = 1$

$|CG| = 4 + 1(\sqrt{2} - 1) = 3 + \sqrt{2}$

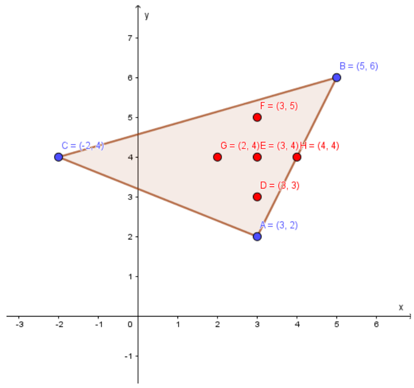
$s = |AG| + |BG| + |CG| = 7 + \sqrt{2}$,

$7 + \sqrt{2} - (5 + 3\sqrt{2}) < 0$ olduğundan G noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamı, F noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamından daha azdır.

$8 - 7 + \sqrt{2} < 0$ olduğundan B noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamı, G noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamından daha azdır.

Buna göre B noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı F ve G noktalarının köşelere olan uzaklıkları toplamından azdır. ABC üçgeninin Çin Daması metriğine göre Fermat noktasının ordinatı 0 dır. Fermat noktası B(0,0) olarak bulunur.

Örnek 2 Çin Dama düzlemde köşe noktaları A(3,2), B(5,6) ve C(-2,4) olan ABC üçgeni verilsin.



Şekil 10 Çin Dama Üçgeninde Fermat Noktası

ABC üçgeninin Çin Daması metriğine göre Fermat noktasını bulmak için seçtiğimiz nokta köşelere olan Çin dama uzaklıkları toplamı en az olan nokta bulunur.

Seçilen D(3,3) noktası için;

$|AD| = 1$

$|BD| = 3 + 2(\sqrt{2} - 1) = 1 + 2\sqrt{2}$

$|CD| = 4 + \sqrt{2}$

$s = |AD| + |BD| + |CD| = 6 + 3\sqrt{2}$, E(3,4) noktası için;

|AE| = 2

|BE| = 2 + 2($\sqrt{2} - 1$) $= 2\sqrt{2}$

|CE| = 5

s = |AE| + |BE| + |CE| = 7 + 2$\sqrt{2}$,

F(3,5) noktası için;

|AF| = 3

|BF| = 2 + $\sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2}$

|CF| = 5 + $\sqrt{2} - 1 = 4 + \sqrt{2}$

s = |AF| + |BF| + |CF| = 8 + 2$\sqrt{2}$,

Seçtiğimiz D, E, F noktalarının üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamı bulunur.

$7 + 2\sqrt{2}$ - $(6 + 3\sqrt{2}) < 0$ olduğundan E noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı D noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamından daha azdır.

$7 + 2\sqrt{2}$ – (8 + 2$\sqrt{2}$)<0 olduğundan E noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı F noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamından daha azdır.

Buna göre E noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı D ve F noktalarının köşelere olan uzaklıkları toplamından azdır. Dolayısıyla ABC üçgeninin Çin Daması metriğine göre Fermat noktasının apsisi 3 tür

G(2,4) noktası için;

|AG| = 2 + $\sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2}$

|BG| = 3 + 2($\sqrt{2} - 1) = 1 + 2\sqrt{2}$

|CG| = 4

s = |AG| + |BG| + |CG| = 6 + 3$\sqrt{2}$,

H(4,4) noktası için;

|AH| = 2 + $\sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2}$

|BH| = 2 + $\sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2}$

|CH| = 6

s = |AH| + |BH| + |CH| = 8 + 2$\sqrt{2}$,

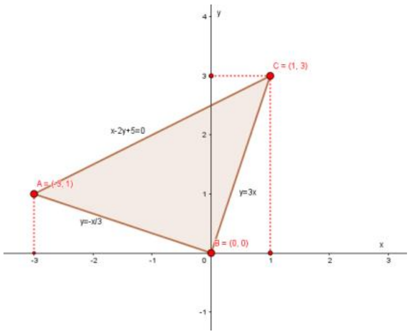
$7 + 2\sqrt{2} - (6 + 3\sqrt{2}) < 0$ olduğundan E noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamı, G noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamından daha azdır.

7 + 2$\sqrt{2}$ - 8 + 2$\sqrt{2} < 0$ olduğundan E noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamı, H noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamından daha azdır.

Buna göre E noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı G ve H noktalarının köşelere olan uzaklıkları toplamından azdır. Dolayısıyla ABC üçgeninin Çin Daması metriğine göre Fermat noktasının ordinatı 4 olarak bulunur.

ABC üçgeninin çin daması metriğine göre Fermat noktası E(3,4) noktasıdır.

Örnek 3 Çin Dama düzlemde köşe noktaları A(-3,1), B(0,0) ve C(1,3) olan ABC üçgeni verilsin.



Şekil 11 Çin Dama Üçgeninde Fermat Noktası

ABC üçgeninin Çin Daması metriğine göre Fermat noktasını bulmak için seçtiğimiz nokta köşelere olan Çin dama uzaklıkları toplamı en az olan nokta bulunur.

Seçilen B(0,0) noktası için;

|AB| = 3 + $\sqrt{2} - 1 = 2 + \sqrt{2}$

|BB| = 0

|CB| = 3 + $\sqrt{2} - 1 = 2 + \sqrt{2}$

s = |AB| + |BB| + |CB| = 4 + 2$\sqrt{2}$,

D(0,1) noktası için;

|AD| = 3

|BD| = 1

|CD| = 2 + $\sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2}$

s = |AD| + |BD| + |CD| = 5 + $\sqrt{2}$,

E(0,2) noktası için;

|AE| = 3 + $\sqrt{2} - 1 = 2 + \sqrt{2}$

|BE| = 2

|CE| = 1 + $\sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$

s = |AE| + |BE| + |CE| = 4 + $\sqrt{2}$,

Seçtiğimiz B, D, E noktalarının üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamı bulunur.

$5 + \sqrt{2}$ - $(4 + 2\sqrt{2}) < 0$ olduğundan D noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı B noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamından daha azdır.

5 + $\sqrt{2}$ – (4 + $\sqrt{2}$)<0 olduğundan D noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı E noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamından daha azdır.

Buna göre D noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı B ve E noktalarının köşelere olan uzaklıkları toplamından azdır.

Dolayısıyla ABC üçgeninin Çin Daması metriğine göre Fermat noktasının ordinatı 1 dir.

F(-1,1) noktası için;

|AF| = 2

$|BF| = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$

$|CF| = 2 + 2(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}$

$s = |AF| + |BF| + |CF| = 2 + 3\sqrt{2}$,

G(1,1) noktası için;

|AG| = 4

$|BG| = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$

|CG| = 2

$s = |AG| + |BG| + |CG| = 6 + \sqrt{2}$,

$5 + \sqrt{2} - \left(2 + 3\sqrt{2}\right) < 0$ olduğundan D noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamı, F noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamından daha azdır.

$5 + \sqrt{2}$ - $(6 + \sqrt{2}) < 0$ olduğundan D noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamı, G noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamından daha azdır.

Buna göre D noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı F ve G noktalarının köşelere olan uzaklıkları toplamından azdır. Dolayısıyla ABC üçgeninin Çin Dama metriğine göre Fermat noktasının apsisi sıfır olarak bulunur.

ABC üçgeninin Çin Daması metriğine göre Fermat noktası D(0,1) noktası olarak elde edilir.

6. Sonuç

Taksi ve Çin Dama düzlemlerinde Fermat noktası incelenmiştir. Başka metrikler ile donatılmış düzlemlerde de bir üçgenin Fermat noktası araştırılabilir.

Taksi metriği kullanılan düzlemdeki bir üçgenin Fermat noktası üçgenin köşelerinden geçen yatay ve dikey doğruların üçgenin içinde veya üzerinde kesiştiği nokta olarak bulunmuştur.

Çin dama metriği kullanılan düzlemdeki bir üçgenin Fermat noktası üçgenin köşelerine Çin dama uzaklıkları toplamı minimum olan nokta bazı özel örneklerde bulunmuştur.

Kaynakça

Akça Z., Kaya R., (1997), On the Taxicab Trigonometry, Jour. of Inst. of Math &.Comp Sci. (Math Ser.), 10, 151 – 159.

Akça, Z., Bayar, A. and Ekmekçi, S., (2007), The norm in CC-plane geometry. Pi Mu Epsilon J. 12, no. 6, 321-324 .

Bayar, A., Ekmekçi,S. and Özcan, M., (2009), On Trigonometric Functions and Cosine-Sine Rules in Taxicab Plane, International Electronic Journal of Geometry 2, 1 , 17-24.

Hanson, J.,R., (2014), Fermat Point for Taxicab Triangle, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2 – 6.

Hanson, J., R., (2016), Fermat Point for A Triangle in Three Dimensions Using The Taxicab Metric, 2.

Kaya, R., Akça, Z., Güanaltılı, İ. and Özcan, M., (2000), General Equation for Taxicab Conics and Their Classification, Mitt. Math. Ges. Hamburg, 19, 135 – 148.

Krause,E.F.,(1965), Taxicab Geometry, Addison – Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, p.88.

Menger, K., (1952), You Will Like Geometry, Guildbook of the Illinois Institute of Technology GeometryExhibit, Museum of Science and Industry, Chicago,III,.

Minkowski, H., (1967), Gesammelte Abhandlungen, Chelsa Publishing Co. New York, 836p.

Özcan, M., Ekmekçi, S., and Bayar, A., (2002), The Taxicab Lengths Under Rotations The Pi Mu Epsilon Journal, Vol. 11, No. 7, 381 – 384.

Turan. M, (2004), Çin Dama Düzleminde Konikler Üzerine, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, s.149.