



Periyodik Eğrilikli İçi Boş Lif İçeren Elastik Ortamda Gerilme Dağılımı

Reşat Köşker^{1*}, İsmail Gülten²

¹ Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya Metalürji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, İstanbul, Türkiye (ORCID: 0000-0002-0051-340X)

² Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı, İstanbul, Türkiye (ORCID: 0000-0001-9459-5970)

(İlk Geliş Tarihi 16 Temmuz 2020 ve Kabul Tarihi 29 Ağustos 2020)

(DOI: 10.31590/ejosat.770569)

ATIF/REFERENCE: Köşker, R. & Gülten, İ. (2020). Periyodik Eğrilikli İçi Boş Lif İçeren Elastik Ortamda Gerilme Dağılımı. *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*, (19), 809-820.

Öz

Bu makalede, düşük yoğunluklu periyodik eğrilikli içi boş lifler içeren sonsuz elastik bir ortamda gerilme dağılımı incelenmiştir. İçi boş liflerin düşük yoğunluğu dikkate alındığında, aralarındaki etkileşim ihmal edilir. Dolayısıyla, dikkate alınan ortam, sonsuz bir elastik gövdeye gömülü sonsuz bir uzunluğa sahip tek bir periyodik eğrilikli içi boş lifdir. Ayrıca, ortamın sonsuzda içi boş lif boyunca etkiyen düzgün dağılmış normal kuvvetlerle yüklendiği varsayılmaktadır. Ortamlar arası yüzeylerde ideal temas koşullarının sağlandığı düşünülmektedir. Araştırmalar, parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin üç boyutlu geometrik doğrusal olmayan kesin denklemleri kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sınır değer probleminin formülasyonu ve matematiksel çözümünde sınır formu pertürbasyon yöntemi kullanılmıştır. Bu çalışmada, içi boş lif ile matris arasındaki temas yüzeyleri üzerindeki normal gerilme ve kendi kendini dengeleyen kayma gerilmeleri için, sıfıncı ve birinci yaklaşımlar çerçevesinde sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Ele alınan cisimdeki gerilme dağılımı ve geometrik doğrusal olmamanın bu dağılıma etkisi ile ilgili çok sayıda sayısal sonuç elde edilmiş ve yorumlanmıştır. Ayrıca, geometrik ve mekanik problem parametrelerinin bu dağılımlara etkileri de analiz edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İçi Boş Lif, Lifli Kompozitler, Gerilme Dağılımı, Periyodik Eğrilik, Geometrik nonlineerite.

Stress Distribution in Elastic Media Containing Hollow Fiber with Periodic Curvature

Abstract

In the present paper, stress distribution is studied in an infinite elastic body containing low concentration of periodical curved hollow fibers. Taking the low concentration of hollow fibers into account the interaction between them is neglected. So, the considered media is a single periodical curved hollow fiber with an infinite length embedded in an infinite elastic body. Moreover, it is assumed that the body is loaded at infinity by uniformly distributed normal forces which act along the hollow fiber. We suppose that on the inter-medium surfaces the completely cohesion conditions are satisfied. The investigations are carried out within the framework of the piecewise homogeneous body model with the use of the three-dimensional geometrical nonlinear exact equations of the theory of elasticity. In formulation and mathematical solution of the obtained boundary value problem, the boundary form perturbation method is used. In this study, numerical results are obtained in the framework of the zeroth and the first approximations for the normal stress and the self-equilibrium shear stresses on the contact surfaces between hollow fiber and matrix. The numerous numerical results related to the stress distribution in considered body and the influence of geometrical nonlinearity to this distribution are obtained and interpreted. Moreover, the influences of the geometrical and mechanical parameters of problem to these distributions are also analyzed.

Keywords: Hollow Fiber, Fibrous Composites, Stress Distribution, Periodic Curvature, Geometrical Non-linearity.

* Sorumlu Yazar: Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya Matalürji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, İstanbul, Türkiye, ORCID: 0000-0002-0051-340X, kosker@yildiz.edu.tr

1. Giriş

Kompozit malzemeler, uygun özelliklerinden dolayı uçuş araçlarında, otomobillerde, teknelerde, boru hatlarında, binalarda, yollarda, köprülerde ve diğer ürünlerde kullanılmaktadırlar (Ahmad ve ark. 2019; Çallıoğlu ve Kavla, 2019). Kompozitlerin en yaygın olanı, güçlendirici liflerin matris malzeme içine gömülü olduğu lifli kompozitlerdir. Tek yönlü lifli kompozitlerde liflerin başlangıç eğrilğine veya bükümüne sahip olabildiği bilinir (Kelly, 1998; Akbarov ve Guz, 2000; Guz, 2003). Bu eğrilikler tasarım sırasında duyulan gereksinim veya teknolojik işlemlerin sonucudur. Genellikle, teknolojik işlemler sırasında ortaya çıkan yerel eğrilikler, tasarım gereksinimi sonucu ortaya çıkmış olan eğrisellikler ise periyodik eğrilikler şeklinde modellenirler. Yapay olarak üretilen kompozit malzemelerin başarılı pratik kullanılışı, bu malzemelerdeki gerilme-şekil değiştirme sözü edilen başlangıç eğrilğinin dikkate alınarak belirlenmesine bağlıdır. Liflerdeki eğrilğın sonucu olarak kendi kendini dengeleyen gerilmeler artar ve bu gerilmeler lifler yönündeki basınç veya çekme etkisinde liflerin matristen ayrılmalarına yol açabilirler (Akbarov ve Guz, 2000; Corten ve ark., 1967). Bu ayrılma, toplamları kompozitlerin mukavemet ve rijitliğini önemli ölçüde değiştirebilecek makro çatlaklara sebep olurlar (Kashtalyan, 2005). Bunlar dışında, güçlendirici liflerin başlangıç küçük eğrilği, tek yönlü kompozit malzemelerin çeşitli kırılma ve stabilite kaybı problemleri için model olarak da kullanılırlar (Akbarov, 2012). Sonuç olarak, eğrisel yapıya sahip kompozit malzemelerin mekaniğinin tespiti, hem şekil değiştiren katı cisimler mekaniğinin gelişimi hem de modern mühendislikte kullanılan çok özel kompozit malzeme bileşenlerinin uygulamalarında önemlidir. Bu amaçla, Akbarov ve Guz (1985) makalesinde, tek yönlü kompozitlerde gerilim-gerinim durumunu araştırmak için elastisite teorisinin üç boyutlu kesin denklemlerinin kullanılmasıyla parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemle elde edilen sonuçlar Akbarov ve Guz (2002)'de detaylandırılmıştır.

Akbarov ve Guz (1985) yayınında kullanılan yöntem, lifler arasındaki etkileşimin yok sayıldığı ve düşük yoğunluklu liflerin olduğu durum için uygulanmıştır. Bu yöntem, Kosker ve Akbarov (2003)'de periyodik eğrilikli komşu iki lif için geliştirilmiş ve sayısal sonuçlar verilmiştir. Akbarov ve Kosker (2003)'de sözü edilen yöntem geometrik doğrusal olmayan duruma genişletilmiş ve tek ve komşu iki periyodik eğrilikli lif için elde edilen sayısal sonuçlar verilmiştir. Bu problemlerin stabilite kaybı araştırmaları Akbarov (2007)'de özetlenmiştir. Akbarov ve ark (2004, 2006, 2010, 2016) yayınlarında ise sözü edilen yaklaşım, sonsuz matriste periyodik olarak yerleştirilmiş bir lifler sırası için geliştirilmiş ve karşılık gelen sayısal sonuçlar sunulmuştur.

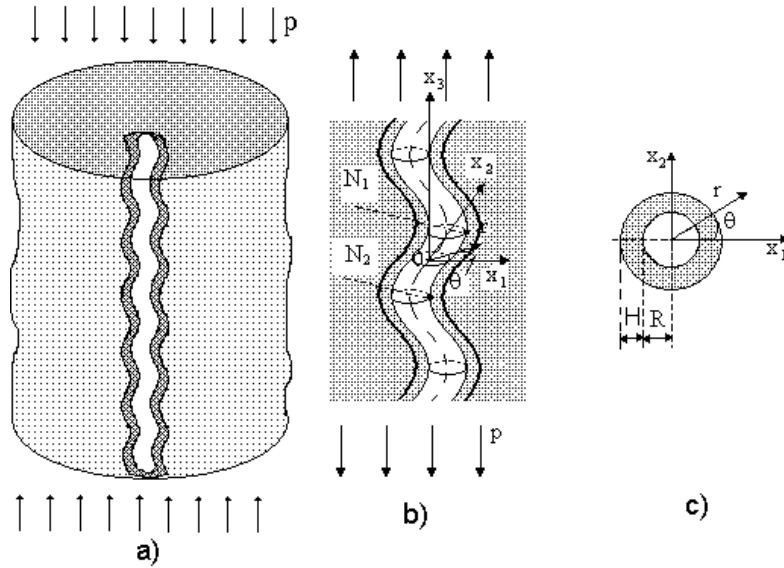
Bununla birlikte, yukarıda detaylandırılan tüm araştırmalarda, kompozit malzemelerin takviye elemanlarının geleneksel malzemelerden yapıldığı varsayılmıştır. Akbarov (2013) makalesinde, kompozit içindeki takviye elemanının çift duvarlı karbon nanotüp olduğu durumda tek yönlü lifli kompozitlerin yapısında iç stabilite kaybı problemlerinin geliştirilmesi için girişimde bulunulmuştur. Bu girişim, karbon nanotüpün, malzeme sabitlerinin belli ölçüler dahilinde olması durumunda, içi boş lif olarak modellenebileceği fikrine dayandırılmıştır (Qian ve ark., 2000; Zhuk ve Guz, 2007; Guz ve Dekret, 2008; Maligino ve ark., 2009).

Bu çalışmada, sonsuz bir cisimde düşük yoğunluklu sonsuz uzunlukta periyodik eğrilikli içi boş lifler olduğu problem ele alınmış ve bu problemin gerilme dağılımı araştırılmıştır. Düşük yoğunluk, içi boş lifler arasındaki mesafenin, lifler arası etkileşimin ihmal edilebileceği kadar büyük olduğu anlamında kullanılmıştır. Araştırmalar, parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin üç boyutlu geometrik doğrusal olmayan kesin denklemleri kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Cismin, sonsuzda lifler yönünde düzgün dağılmış normal kuvvetler etkisinde olduğu varsayılmıştır.

Matris ile içi boş lif yüzeyleri arasında tam yapışma olduğu varsayılarak ele alınan problemin matematiksel formülasyonu ile sınır-değer problemi elde edilmiştir. Bu problemin çözümü için, tüm bilinmeyenlerin küçük bir parametrenin kuvvet serisi biçiminde gösterildiği sınır formu pertürbasyon yöntemi kullanılmıştır. Böylece, her bir yaklaşım için denklemler takımı elde edilmiş ve yine her bir yaklaşım için temas koşulları bulunmuştur. İstenen değerler sayısal olarak belirlenmiştir. Bu çalışmada, içi boş lif ve matris arasındaki temas yüzeylerinde normal gerilme ve kendi kendini dengeleyen kayma gerilmeleri için sıfıncı ve birinci yaklaşımlar çerçevesinde sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Dikkate alınan cisimdeki gerilme dağılımı ve geometrik doğrusal olmamanın bu dağılıma etkisi ile ilgili çok sayıda sayısal sonuç elde edilmiş ve yorumlanmıştır.

2. Problemin Matematiksel Formülasyonu

Sonsuz elastik ortamda düşük yoğunluklu periyodik eğrilikli içi boş lifler olduğunu düşünelim (Şekil 1a). Burada “düşük yoğunluklu” ile lifler arasındaki etkileşimin ihmal edilebilecek kadar liflerin birbirinden uzak olduğu vurgulanmaktadır. Lifin orta çizgisine dik olan kesitlerin daire olduğunu ve iç yarıçapın R ; lif kalınlığının H dolayısıyla lif yarıçapının $R + H$ (Şekil 1c) olduğunu ve bu değerlerin lif boyunca sabit kaldığını varsayalım. Sözü edilen kesit dairelerin merkezinden geçen eğriyi çalışma boyunca lifin orta çizgisi olarak ifade edeceğiz. Lagrange koordinatları olarak başlangıç noktası lifin orta çizgisi üzerinde olacak şekilde $Ox_1x_2x_3$ kartezyen $O\theta z$ silindirik koordinat takımlarını seçelim (Şekil 1b, c). Cismin sonsuzda lif yönünde (Ox_3 (Oz) yönünde) p yoğunluklu düzgün dağılmış normal kuvvetler etkisinde olduğu düşünülmektedir.



Şekil 1. Ele alınan problemin geometrisi ve seçilen koordinat takımları

Bu durumda incelemelerimiz lif ve matrisin farklı lineer elastik, homojen ve izotropik malzemelerden oluştuğu düşünülerek, sürekli ortamlar mekaniğinde elastisite teorisinin kesin üç boyutlu geometrik nonlineer denklemleri kullanılarak yapılacaktır. İçi boş lifle ilgili tüm büyüklükler (2) üst indisi ile gösterilirken, matris ile ilgili olanlar (1) üst indisi ile gösterilecektir. Lifin orta çizgi denklemini

$$x_1 = \varepsilon \delta(x_3) = L \sin\left(\frac{2\pi}{\ell} x_3\right) = \varepsilon \ell \sin\left(\frac{2\pi}{\ell} x_3\right) = \varepsilon \ell \sin(\alpha x_3), \quad x_2 = 0, \quad \varepsilon = \frac{L}{\ell}, \quad (1)$$

olarak ifade edelim. ε ($0 < \varepsilon \ll 1$) lifin eğilme genliğini belirten küçük bir parametre (L eğriliğin genliği, ℓ eğriliğin periyodu olmak üzere), $\delta(x_3)$ fonksiyonu ise malzemenin p yoğunluklu düzgün dağılmış normal kuvvetler etkisine girmeden önceki (başlangıç durumundaki, şekil değiştirme gerçekleşmeden önceki) eğilme formunu ifade etmektedir. (1) denkleminde ifade ettiğimiz üzere, lifin orta çizgisi $x_2 = 0$ düzlemi üzerindedir. Kuvvetlerin yüklenmesinin ardından da bu çizginin aynı düzlem üzerinde kaldığı varsayılacaktır. İçi boş lif ile matris arasındaki temas yüzeyini S ile gösterelim. Yukarıda kabul edilen varsayımlar dikkate alındığında, bu yüzeyin ve birim dış normal vektörü bileşenlerinin ifadeleri aşağıdaki şekilde yazılabilirler:

$$r_k = (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2 \sin^2 \theta)^{-1} \left\{ (\varepsilon \delta(t_3) + \varepsilon^3 \delta(t_3) (\delta'(t_3))^2 \sin \theta + [R^2 - \varepsilon^2 (\delta(t_3))^2 - \varepsilon^4 (\delta'(t_3))^2 (\delta'(t_3))^2 (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2) \sin^2 \theta]^{1/2}) \right\} \quad (2)$$

$$z_k = t_3 - \varepsilon \delta'(t_3) r(t_3) \sin \theta + \varepsilon^2 \delta(t_3) \delta'(t_3), \quad \delta'(t_3) = \frac{d\delta(t_3)}{dt_3}$$

$$A(\theta, t_3) = \left[\left(r(\theta, t_3) \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} - \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial \theta} \right)^2 + \left(r(\theta, t_3) \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 \right]^{1/2} \text{ olmak üzere}$$

$$n_r = r(\theta, t_3) \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} [A(\theta, t_3)]^{-1}, \quad n_\theta = \left[\frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial \theta} \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} - \frac{\partial z(\theta, t_3)}{\partial t_3} \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial \theta} \right] [A(\theta, t_3)]^{-1}, \quad n_z = -r(\theta, t_3) \frac{\partial r(\theta, t_3)}{\partial t_3} [A(\theta, t_3)]^{-1} \quad (3)$$

(2) ifadelerinde $t_3 \in (-\infty, +\infty)$ bir parametredir. Lif malzemesi ve sonsuz elastik ortamda aşağıdaki alan denklemleri sağlanır.

$$\nabla_i \left[\sigma^{(k)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(kj)} \right) \right] = 0, \quad (4)$$

$$2\varepsilon_{jm}^{(k)} = \nabla_j u_m^{(k)} + \nabla_m u_j^{(k)} + \nabla_j u^{(kn)} \nabla_m u_n^{(k)}, \quad (5)$$

$$\sigma_{(in)}^{(k)} = e^{(k)} \delta_i^n + 2\varepsilon_{(in)}^{(k)}, \quad e^{(k)} = \varepsilon_{(rr)}^{(k)} + \varepsilon_{(\theta\theta)}^{(k)} + \varepsilon_{(zz)}^{(k)}, \quad k = 1, 2 \quad (6)$$

Burada $\sigma_{(in)}^{(k)}$ 'lar ve $\varepsilon_{(in)}^{(k)}$ 'lar sırasıyla gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin fiziksel bileşenleridir. Verdiğimiz (4)-(6) denklemlerinde tansör notasyonu kullanılmıştır ve tekrarlanan indislere göre Einstein toplam uyuşumu yapılacak, ancak tekrarlanan altı çizili indislere göre bu uyuşum uygulanmayacaktır. S yüzeyi üzerinde ideal temas koşullarının sağlandığını kabul edelim ve bu koşulları

$$\sigma^{(1)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(1j)} \right) \Big|_S \mathbf{n}_j = \sigma^{(2)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(2j)} \right) \Big|_S \mathbf{n}_j, \quad \mathbf{u}_j^{(1)} \Big|_S = \mathbf{u}_j^{(2)} \Big|_S, \quad (7)$$

Bu denklemlerde n_j 'ler ara yüzeyin birim normal vektörü \mathbf{n} 'nin kovaryant bileşenleridir. Bundan başka, lifin iç yüzeyinde (bu yüzeyi S_0 ile, bu yüzeyin dış normal vektörünün bileşenlerini ise n_j^0 ile işaret edelim)

$$\sigma^{(2)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(2)j} \right) \Big|_{S_0} n_j^0 = 0, \quad (8)$$

sınır koşullarının sağlanır. Bunların yanı sıra aşağıdaki sınır koşullarının da sağlandığını varsayacağız.

$$\sigma_{zz}^{(1)} \xrightarrow{r_i \rightarrow \infty} P, \quad \sigma_{ij}^{(1)} \xrightarrow{r_i \rightarrow \infty} 0, \quad ij \neq zz \quad (9)$$

σ^{ij} , ε^{ij} ve σ_{ij} , ε_{ij} gerilme (σ) ve şekil değiştirme (ε) tansörlerinin ele alınan silindirik koordinat takımındaki kovaryant ve kontravaryant bileşenlerini, u^i , u_i 'ler ise yer değiştirme (\mathbf{u}) vektörünün bu koordinat takımındaki kovaryant ve kontravaryant bileşenlerini göstermektedir.

Yukarıda söylenenlerle, ele alınan problemin matematik formülasyonu genel bir biçimde verilmiş olmaktadır. Böylece, sonsuz elastik bir ortamdaki periyodik eğrilikli içi boş sonsuz uzun tek lif içeren kompozit malzemede gerilme analizi (4)-(6) denklemler takımının (7)-(9) temas koşulları çerçevesinde incelenmesine, dolayısıyla sınır-değer problemi haline getirilmiştir. Bundan sonraki aşamada bu sınır-değer probleminin çözümü ile ilgilenilecektir.

3. Sınır-Değer Probleminin Çözümü

Bir önceki bölümde elde edilen sınır-değer problemi Akbarov ve Guz (2000)'de verilen sınır formu pertürbasyon yöntemi kullanılarak çözülecektir. Buna göre bilinmeyen büyüklüklerin tümü, aşağıdaki şekilde, küçük ε parametresi cinsinden seri şeklinde gösterileceklerdir.

$$\sigma_{rr}^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \sigma_{rr}^{(k),q}, \dots, \varepsilon_{rr}^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \varepsilon_{rr}^{(k),q}, \dots, u_r^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q u_r^{(k),q}, \dots \quad (10)$$

ε^q nun katsayıları, detayları burada verilmeyen bazı rutin ama uzun işlemler yapılarak elde edilebilirler. Ayrıca, lif-matris arayüzey denklemleri ile bu yüzeyin birim dış vektör bileşenleri de bu küçük parametreye göre seriye açılırsa aşağıdakiler elde edilir:

$$r = R + \varepsilon \delta' \cos \theta + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\delta^2}{R} - R \delta'^2 \right) \cos^2 \theta + \dots, \quad z = t - R \delta' \cos \theta + \varepsilon^2 \delta \delta' \sin^2 \theta + \dots \quad (11)$$

$$n_r = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\delta^2}{R} \sin^2 \theta + \delta'^2 \cos^2 \theta \right) + \dots, \quad n_\theta = \varepsilon \frac{\delta}{R} \sin \theta + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin 2\theta (\delta \delta' - \delta'^2) + \dots, \quad (12)$$

$$n_z = \varepsilon \delta \sin \theta - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin 2\theta \left(R \delta'^2 - \frac{\delta^2}{R} - R \delta \delta'' \right) + \dots$$

(10) ifadeleri (4)-(6) denklemlerinde yerlerine konur ve küçük parametrenin eşit kuvvetlerine göre gruplandırma yapılırsa her bir yaklaşım için bir tam system elde ederiz. Bu durumda, (4)-(6) denklemleri sıfırcı yaklaşım için sağlanır ve birinci ve diğer yaklaşımlar için elde edilen denklemler önceki yaklaşımlarda elde edilen değerleri içerirler. Lif malzemesi güçlendirici olduğundan bu malzemeyi nispeten sert alabiliriz. Böylece sıfırcı yaklaşım için elde edilen denklemlerde lineer olmayan terim ihmal edilebileceğinden birinci ve diğer yaklaşımlarda $(g_n^j + \nabla_n u^{(k),j,0})$ terimi δ_n^j terimi ile yer değiştirir. Bu kabullerle, birinci yaklaşım için denge denklemleri tansör ve vektörlerin fiziksel bileşenleri cinsinden aşağıdaki şekilde elde edilirler:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\sigma_{rr}^{(k),1} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),1} \right) + \sigma_{zz}^{(k),0} \left(\frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),1} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),1}}{\partial z^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),1} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Mekanik ve geometrik ilişkiler de aşağıdaki gibi yazılabilirler:

$$\sigma_{(m)}^{(k),1} = \lambda^{(k)} e^{(k),1} \delta_i^n + 2\mu^{(k)} \varepsilon_{(m)}^{(k),1}, \quad \lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad e^{(k),1} = \varepsilon_{(11)}^{(k),1} + \varepsilon_{(22)}^{(k),1} + \varepsilon_{(33)}^{(k),1}, \quad \varepsilon_{rr}^{(k),1} = \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r},$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(k),1} = \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{r\partial\theta} + \frac{u_r^{(k),1}}{r}, \varepsilon_{zz}^{(k),1} = \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z}, \varepsilon_{r\theta}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^{(k),1}}{r\partial\theta} + \frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}^{(k),1}}{r} \right), \varepsilon_{\theta z}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k),1}}{r\partial\theta} \right),$$

$$\varepsilon_{r^2}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} \right) \quad (14)$$

Birinci yaklaşım için elde edilen bu denklemler, elastisite teorisinin üç boyutlu doğrusallaştırılmış denklemleri ile çakışır (Akbarov ve Guz, 2000).

Şimdi, her bir yaklaşım temas koşullarını (7)-(8) koşullarından yararlanarak elde edeceğiz. Bunun için, (10)-(12) ifadelerini (7)-(8) denklemlerinde, $\sigma_{rr}^{(k),q}, \dots, u_r^{(k),q}$ (R, θ, t_3) ve ($R+H, \theta, t_3$) noktaları civarında Taylor serisine açarak kullanacağız. Bu işlemleri ve küçük parametrenin eşit kuvvetleri cinsinden gruplandırma yapar ve kabülümüzü dikkate alırsak her bir yaklaşım için aşağıdaki temas koşullarına ulaşırız.

Sıfırncı yaklaşım için:

$$\sigma_{(ij)}^{(2),0} \Big|_{r=R+H} = \sigma_{(ij)}^{(1),0} \Big|_{r=R+H}, u_{(i)}^{(2),0} \Big|_{r=R+H} = u_{(i)}^{(1),0} \Big|_{r=R+H}; \sigma_{(ij)}^{(2),0} \Big|_{r=R} = 0 \quad (ij) = rr, r\theta, rz, \quad (i) = r, \theta, z \quad (15)$$

Birinci yaklaşım için:

$$\left[\sigma_{(ir)} \right]_{1,1}^{2,1} + f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \phi_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_r \left[\sigma_{(ir)} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_{\theta} \left[\sigma_{(i\theta)} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_z \left[\sigma_{(iz)} \right]_{1,0}^{2,0} = 0, \left[u_{(i)} \right]_{1,1}^{2,1} + f_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \phi_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} = 0 \quad (16)$$

$$\left[\sigma_{(ir)} \right]_{1,1}^{2,1} + f_{11} \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \phi_{11} \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_{r1} \left[\sigma_{(ir)} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_{\theta 1} \left[\sigma_{(i\theta)} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_{z1} \left[\sigma_{(iz)} \right]_{1,0}^{2,0} = 0, \quad (i) = r, \theta, z \quad (17)$$

(16) ve (17) denklemlerinde (i) yerine r, θ and z koyarak birinci yaklaşımın temas koşullarını açık olarak elde ederiz., (16)-(17)'de aşağıdaki notasyon kullanılmıştır:

$$[\phi]_{1,s}^{2,s} = \phi^{(2),s} - \phi^{(1),s}; \quad [\phi]^{2,s} = \phi^{(2),s};$$

$$f_1 = \delta(t_3) \cos \theta; \quad \phi_1 = -(R+H)\delta'(t_3) \cos \theta, \quad \gamma_r = \left(\frac{\delta(t_3)}{R+H} - \delta''(t_3)(R+H) \right) \cos \theta; \quad \gamma_{\theta} = -\frac{\delta(t_3)}{R+H} \sin \theta; \quad \gamma_z = -\delta'(t_3) \cos \theta;$$

$$f_{11} = \delta(t_3) \cos \theta; \quad \phi_{11} = -R\delta'(t_3) \cos \theta, \quad \gamma_{r1} = \left(\frac{\delta(t_3)}{R} - \delta''(t_3)R \right) \cos \theta; \quad \gamma_{\theta 1} = -\frac{\delta(t_3)}{R} \sin \theta; \quad \gamma_{z1} = -\delta'(t_3) \cos \theta;$$

$$\delta'(t_3) = \frac{d\delta(t_3)}{dt_3}, \quad \delta''(t_3) = \frac{d^2\delta(t_3)}{dt_3^2}, \quad \delta(t_3) = \ell \sin \left(\frac{2\pi}{\ell} x_3 \right)$$

Şimdi, sıfırncı ve birinci yaklaşımlara ait bilinmeyenleri belirleyeceğiz. Akbarov ve Guz (2000)'a göre Poisson oranlarının eşit alınması ($\nu^{(1)} = \nu^{(2)}$) nümerik sonuçlarda önemli bir etki yapmamaktadır. İşlemleri basitleştirmek için lif malzemesi ile matris malzemesinin Poisson oranlarını eşit kabul edeceğiz. Buradan, belli bazı işlemlerle sıfırncı yaklaşımın çözümü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\varepsilon_{zz}^{(1),0} = \varepsilon_{zz}^{(2),0} = \frac{P}{E^{(1)}}, \quad \sigma_{zz}^{(1),0} = p, \quad u_z^{(1),0} = u_z^{(2),0} = \frac{P}{E^{(1)}} z, \quad u_r^{(1),0} = -\nu^{(1)} \varepsilon_{zz}^{(1),0},$$

$$u_r^{(2),0} = -\nu^{(2)} \varepsilon_{zz}^{(2),0}, \quad u_{\theta}^{(1),0} = u_{\theta}^{(2),0} = 0, \quad \sigma_{rr}^{(1),0} = \sigma_{rr}^{(2),0} = \sigma_{\theta\theta}^{(1),0} = \sigma_{\theta\theta}^{(2),0} = 0, \quad \sigma_{zz}^{(2),0} = p \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}. \quad (18)$$

Burada, $E^{(1)}$, ve $E^{(2)}$, sırasıyla matris ve lif malzemelerinin Ox_3 yönündeki elastisite modülleridir.

Sıfırncı yaklaşımın çözümü olan (18) ifadelerini dikkate alırsak, birinci yaklaşıma ait temas koşulları aşağıdaki hale gelir:

$$\left(\sigma_{rr}^{(1),1} - \sigma_{rr}^{(2),1} \right) \Big|_{(R+H,\theta,t_3)} = 0, \quad \left(\sigma_{r\theta}^{(1),1} - \sigma_{r\theta}^{(2),1} \right) \Big|_{(R+H,\theta,t_3)} = 0, \quad \left(\sigma_{rz}^{(1),1} - \sigma_{rz}^{(2),1} \right) \Big|_{(R+H,\theta,t_3)} = \left(\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0} \right) \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos \theta$$

$$\left(u_r^{(1),1} - u_r^{(2),1} \right) \Big|_{(R+H,\theta,t_3)} = 0, \quad \left(u_{\theta}^{(1),1} - u_{\theta}^{(2),1} \right) \Big|_{(R+H,\theta,t_3)} = 0, \quad \left(u_z^{(1),1} - u_z^{(2),1} \right) \Big|_{(R+H,\theta,t_3)} = 0$$

$$\sigma_{rr}^{(2),1} \Big|_{(R,\theta,t_3)} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(2),1} \Big|_{(R,\theta,t_3)} = 0, \quad \sigma_{rz}^{(2),1} \Big|_{(R,\theta,t_3)} = \sigma_{zz}^{(2),0} \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \cos \theta \quad (19)$$

Birinci yaklaşıma ait olan (13), (14), (19) problemini çözmek için aşağıdaki gösterilimi kullanacağız (Guz, 1999).

$$u_r^{(k),q} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi^{(k),q} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \chi^{(k),q}; \quad u_\theta^{(k),q} = -\frac{\partial}{\partial r} \psi^{(k),q} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \chi^{(k),q}; \quad \Delta_1^{(k)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$u_z^{(k),q} = (\lambda^{(k)} + \mu^{(k)})^{-1} \left((\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}) \Delta_1^{(k)} + (\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k),q}; \quad q = 1, 2.$$

(20)

(20)'deki $\psi^{(k),q}, \chi^{(k),q}$ fonksiyonlar aşağıdaki, diferansiyel denklemleri sağlarlar:

$$\left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_1^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^{(k),q} = 0; \quad \left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_2^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_3^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k),q} = 0, \quad k = 1, 2$$

$$\xi_1^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\mu^{(k)}}}, \quad \xi_2^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\mu^{(k)}}}, \quad \xi_3^{(k)} = \sqrt{\frac{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}}} \quad (21)$$

Birinci yaklaşımın temas koşullarının aldığı son şekil olan (19)'u dikkate alarak (21) diferansiyel denklemlerini çözersek $\psi^{(k),q}, \chi^{(k),q}$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\psi^{(2)} = \alpha \left[A_1^{(2)} I_1(\xi_1^{(2)} \alpha r) + B_1^{(2)} K_1(\xi_1^{(2)} \alpha r) \right] \sin \alpha z \sin \theta$$

$$\chi^{(2)} = \left[A_2^{(2)} I_1(\xi_2^{(2)} \alpha r) + A_3^{(2)} I_1(\xi_3^{(2)} \alpha r) + B_2^{(2)} K_1(\xi_2^{(2)} \alpha r) + B_3^{(2)} K_1(\xi_3^{(2)} \alpha r) \right] \cos \alpha z \cos \theta \quad (22)$$

$$\psi^{(1)} = A_1^{(1)} K_1(\xi_1^{(1)} \alpha r) \sin \alpha z \sin \theta$$

$$\chi^{(1)} = \left[A_2^{(1)} K_1(\xi_2^{(1)} \alpha r) + A_3^{(1)} K_1(\xi_3^{(1)} \alpha r) \right] \cos \alpha z \cos \theta \quad (23)$$

(22), (23)'de $\alpha = 2\pi/\ell$ dir. $I_n(x), K_n(x)$ ise sırasıyla sanal argümanlı Bessel fonksiyonları ve Macdonald fonksiyonlarıdır. (22) ve (23) fonksiyonlarını (20) ve (14)'de kullanır, sonra elde edilenleri (19) temas koşullarına taşırsak $A_k^{(q)}, B_k^{(q)}, k = 1, 2, 3; q = 1, 2$ bilinmeyenleri belirleyebileceğimiz lineer denklemler sistemi elde etmiş oluruz. Bu sistemi çözerek, istediğimiz gerilme değerlerine ulaşırız.

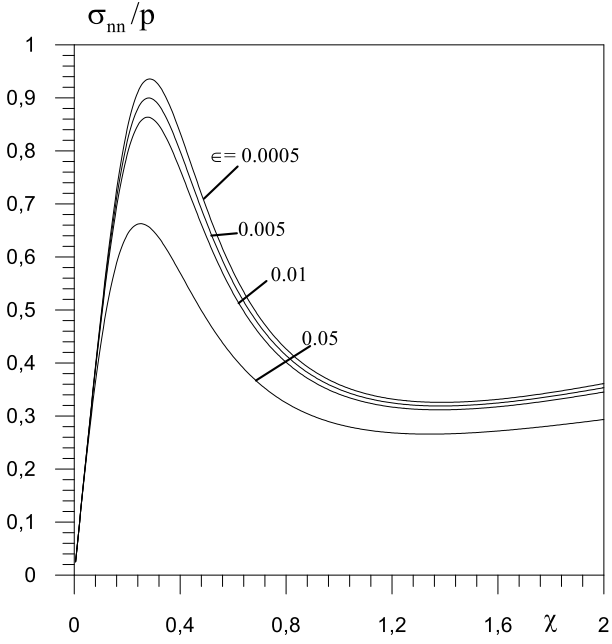
3. Sayısal Sonuçlar ve Tartışma

Normal ve kayma gerilmelerinin sayısal değerleri sıfırncı ve birinci yaklaşım çerçevesinde elde edilmişlerdir. Sonraki yaklaşımların hesaba katılması, değerleri nitelik olarak değiştirmemekte, ancak nicelik olarak kalitesini artırmaktadır. Dolayısıyla, hesabın buradaki sınırlandırması gerilmelerin parametre değerlerine göre değişimlerini izleyebilmek için yeterli olacaktır (Akbarov ve Guz, 2000; Kosker ve Akbarov, 2003; Akbarov ve Kosker, 2003, Akbarov ve ark., 2004, 2006, 2010, 2016; v.d.). Sayısal değerler FTN77 programlama ile kodlanan program aracılığı ile bilgisayarda otomatik olarak üretilmişlerdir. Lifin içindeki boşluğun tamamen kaldırılması ile elde edilen sonuçların Akbarov ve Guz (2000)'deki sonuçlarla çakışması ve bilinen mekaniksel değerlendirmelerle uyumlu olmaları, elde edilen sayısal değerlerin doğruluğunu göstermiştir.

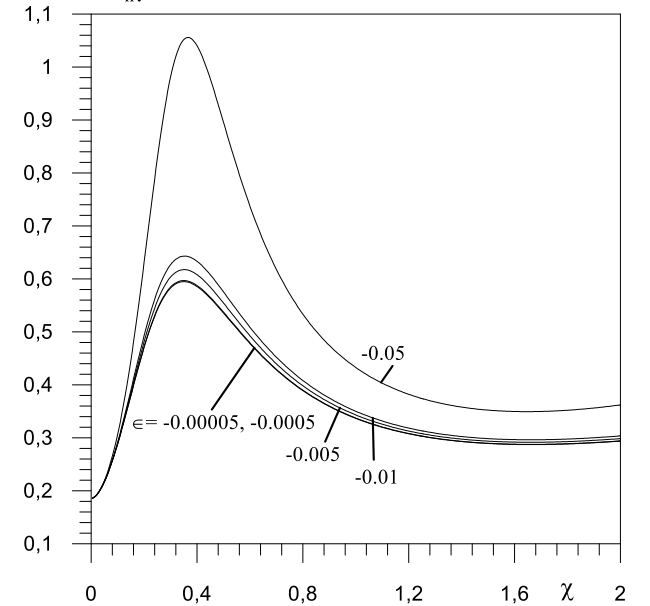
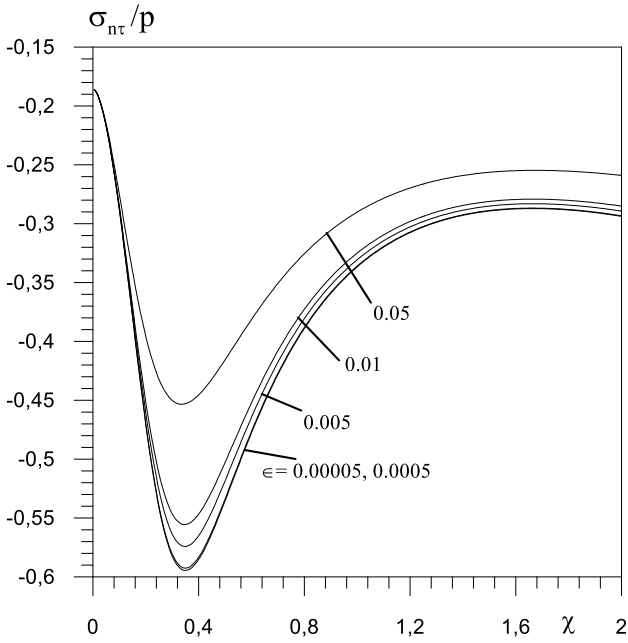
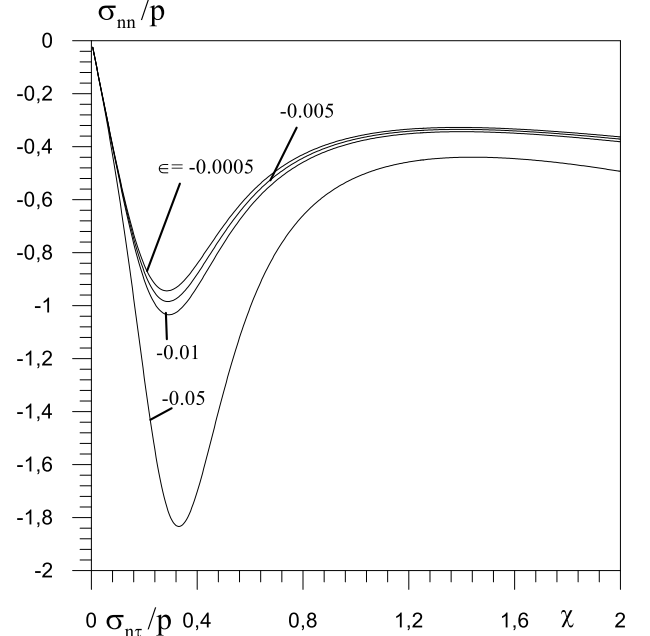
σ_{nn}, σ_{nr} ve σ_{ne} gerilmeleri, arakesit yüzeyi üzerinde, sırasıyla $(\theta = 0, \alpha t_3 = \pi/2), (\theta = 0, \alpha t_3 = 0), (\theta = \pi/2, \alpha t_3 = \pi/2)$ noktalarında mutlak maksimal değerlerini almaktadırlar. Bunu, gerilme değerlerinin hesabına giren gerilme tansörünün fiziksel bileşeninin matematiksel ifadesinden görmek mümkün olmuştur.

Gerilme değerlerine geometrik nonlineeritenin etkisini göstermek için, $\epsilon = p/E^{(1)}$ boyutsuz parametresini, lif yarıçapının etkisini göstermek için $\chi = \alpha(R+H)$ boyutsuz parametresini ve lif kalınlığının etkisini göstermek için de $\gamma = H/(R+H)$ boyutsuz parametrelerini tanımlayalım. Şekil 2, 3 ve 4'de sırasıyla $\sigma_{nn}/p, \sigma_{nr}/p$ e σ_{ne}/p 'ler ile $\chi = \alpha(R+H)$ arasındaki ilişkiyi gösterirken Şekil 5, 6 ve 7 ise $\sigma_{nn}/p, \sigma_{nr}/p$ e σ_{ne}/p 'ler ile $\gamma = H/(R+H)$ arasındaki ilişkiyi yansıtmaktadır. Bu grafikler $\epsilon = 0.015, \nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3, E^{(2)}/E^{(1)} = 300$ durumunda farklı ϵ parametresi değerlerinde kurulmuşlardır. Bilindiği üzere geometrik lineer durumda söz konusu gerilmeler için elde edilen sonuçlar, çekme ($\epsilon > 0$) ve basınç ($\epsilon < 0$) durumlarında ancak işaret farkı gösterirler. Bu grafiklerden de $\epsilon = \pm 5.10^{-5}$ değerlerinde gerilme değerlerinin mutlak değerinin çakıştığı izlenmektedir. Ayrıca, grafikler $|\epsilon|$ değeri arttıkça çekmede gerilme değerlerinin azaldığını, basınçta ise gerilme değerlerinin arttığını göstermektedir. σ_{nn}, σ_{ne} gerilmeleri σ_{nr}

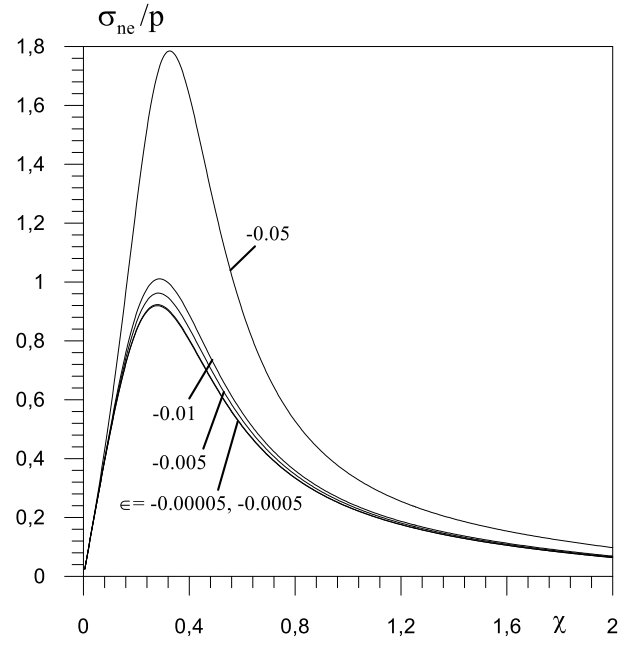
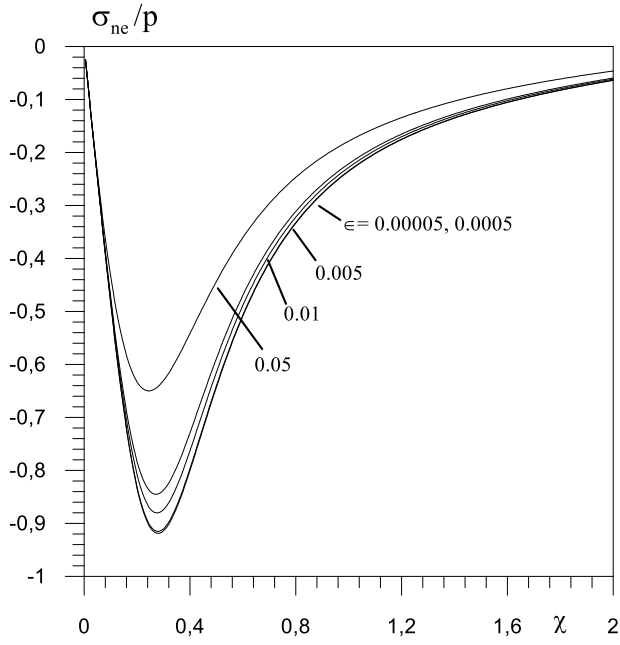
gerilme değerlerine göre daha büyük değerler alabilmektedirler. Yine grafiklerden, σ_{nn}/p , σ_{nr}/p ve σ_{ne}/p 'ler ve χ parametresi arasındaki ilişkilerin monoton olmadığını, söz konusu gerilmeler ile γ arasındaki ilişkilerin ise monoton olduğunu söyleyebiliriz. $v^{(1)} = v^{(2)}$ olmasından dolayı sıfırcı yaklaşımda bu gerilmeler özdeşlikle sıfıra eşittir. Dolayısıyla, bu gerilmelerin grafik ve tablolardaki değerleri lifin başlangıç eğilmesinden kaynaklanmaktadır.



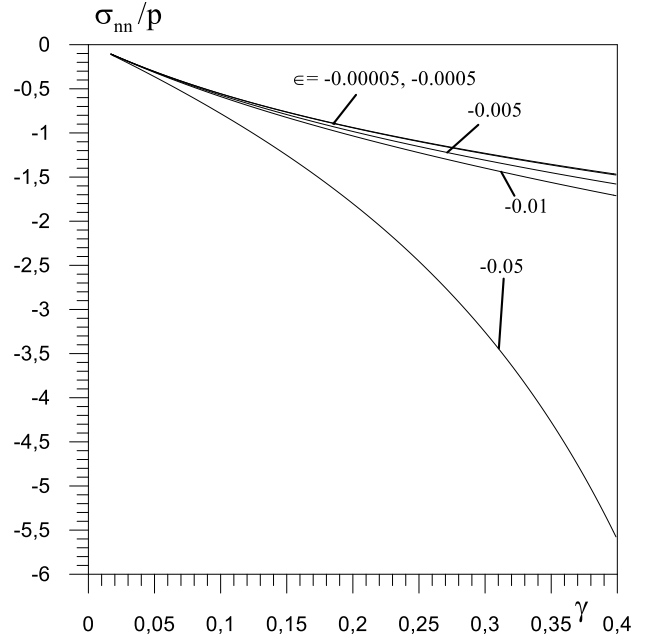
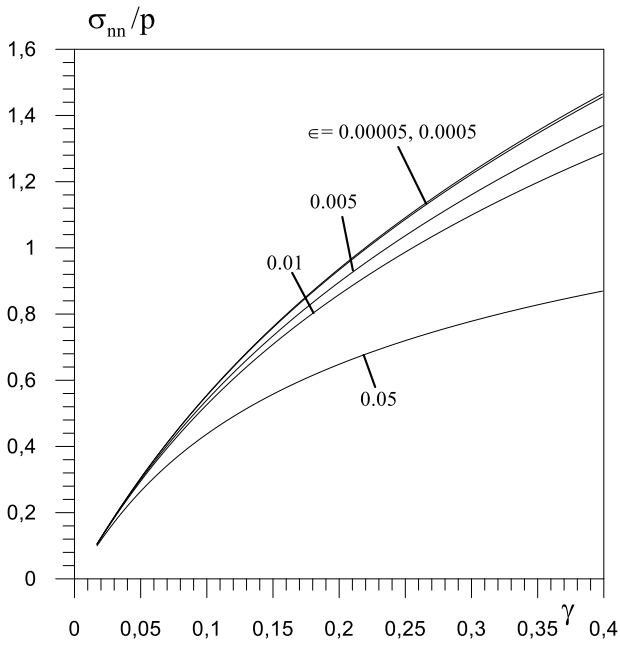
Şekil 2. Çekme ve basınçta çeşitli ϵ değerlerinde σ_{nn}/p ile χ arasındaki ilişki ($\gamma = 0.2$)



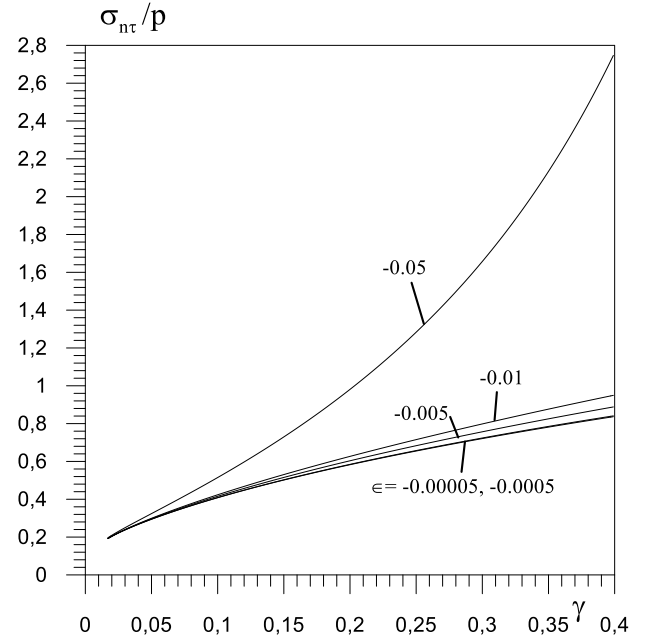
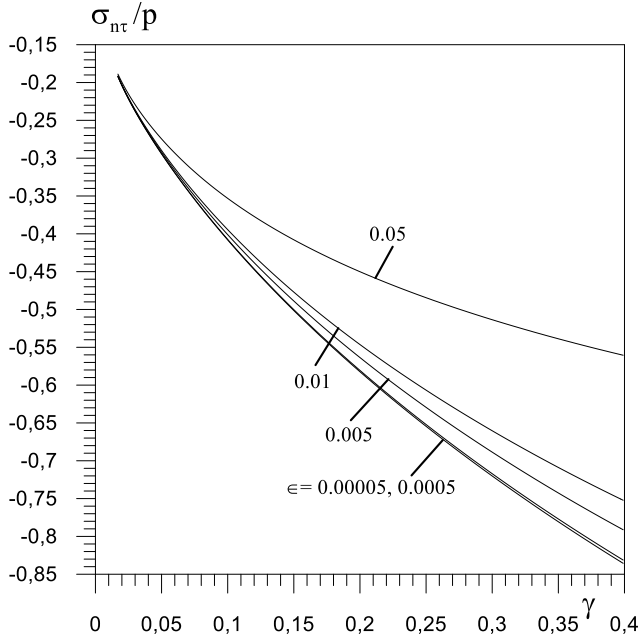
Şekil 3. Çekme ve basınçta çeşitli ϵ değerlerinde σ_{nr}/p ile χ arasındaki ilişki ($\gamma = 0.2$)



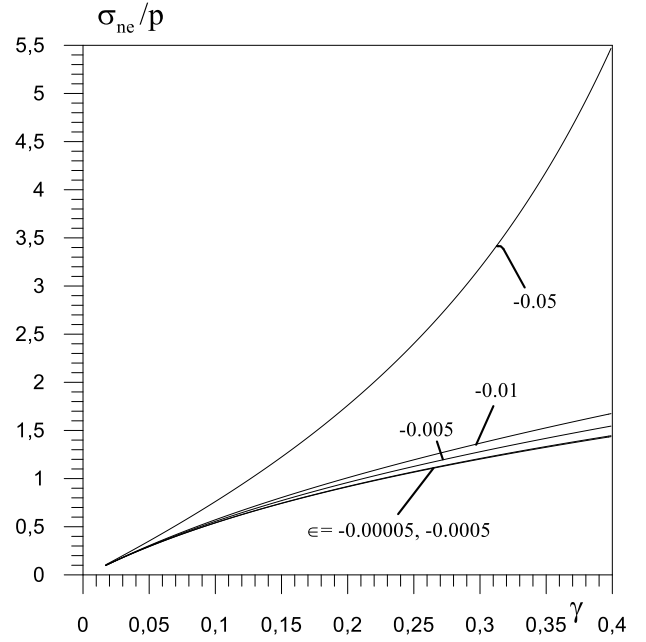
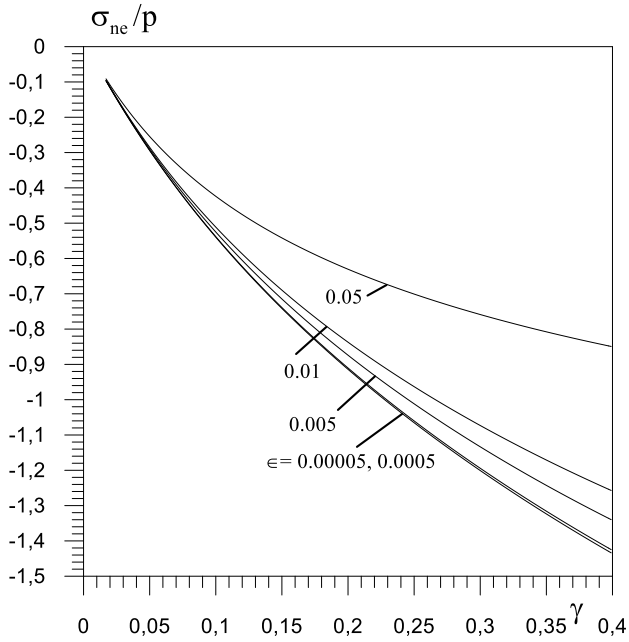
Şekil 4. Çekme ve basınçta çeşitli ϵ değerlerinde σ_{ne}/p ile χ arasındaki ilişki ($\gamma = 0.2$)



Şekil 5. Çekme ve basınçta çeşitli ϵ değerlerinde σ_{nn}/p ile γ arasındaki ilişki ($\chi = 0.3$)



Şekil 6. Çekme ve basınçta çeşitli ϵ değerlerinde σ_{nr}/p ile γ arasındaki ilişki ($\chi=0.3$)



Şekil 7. Çekme ve basınçta çeşitli ϵ değerlerinde σ_{ne}/p ile γ arasındaki ilişki ($\chi=0.3$)

Tablo 1, 2 ve 3 çeşitli γ , $E^{(2)}/E^{(1)}$ ve ϵ değerlerinde sırasıyla σ_{nn}/p , σ_{nr}/p e σ_{ne}/p gerilmelerinin aldığı somut sayısal değerler görülmektedir. Buradan da, $|\epsilon|$ değeri arttıkça çekmede gerilme değerlerinin azaldığı, basınçta ise gerilme değerlerinin arttığı görülmektedir. Ayrıca geometrik lineer durumunda çekme ve basınca karşılık gelen gerilme değerlerinin mutlak değerce aynı kaldığına tanık olunmaktadır. Bundan başka γ ve $E^{(2)}/E^{(1)}$ parametrelerinin artımının gerilme değerlerini artırdığını söyleyebiliriz.

Tüm sayısal hesaplamalarda kullanılan ϵ değerlerinin stabilite kaybına sebep olan kritik değerlerden küçük olduğunu, dolayısıyla stabilite kaybı öncesi gerilme araştırması yapıldığını belirtelim.

Tablo 1. Çeşitli γ , $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$ ve ϵ değerleri için σ_{nn}/p gerilme değerleri ($\chi = 0.3$)

		σ_{nn}/p							
$\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$	γ	$\epsilon = p/E^{(1)}$							
		Çekme				Basınc			
		0.00005	0.005	0.01	0.05	-0.00005	-0.005	-0.01	-0.05
20	0.05	0.0191	0.019	0.019	0.0189	-0.0191	-0.0191	-0.0191	-0.0192
	0.1	0.037	0.0369	0.0368	0.0363	-0.037	-0.037	-0.0371	-0.0377
	0.2	0.0736	0.0733	0.073	0.0708	-0.0736	-0.0739	-0.0742	-0.0768
	0.3	0.1076	0.107	0.1064	0.1019	-0.1076	-0.1082	-0.1088	-0.1144
	0.4	0.1377	0.1367	0.1357	0.1286	-0.1377	-0.1387	-0.1398	-0.149
50	0.05	0.0485	0.0483	0.0482	0.0473	-0.0485	-0.0486	-0.0487	-0.0498
	0.1	0.099	0.0984	0.0979	0.0941	-0.099	-0.0995	-0.1	-0.1047
	0.2	0.1931	0.1913	0.1894	0.1761	-0.1932	-0.1951	-0.1972	-0.2156
	0.3	0.2753	0.2716	0.2679	0.2425	-0.2754	-0.2793	-0.2834	-0.3222
	0.4	0.3461	0.3403	0.3346	0.2964	-0.3462	-0.3523	-0.3587	-0.4222
100	0.05	0.1015	0.1009	0.1004	0.0964	-0.1015	-0.102	-0.1026	-0.1076
	0.1	0.2019	0.1999	0.1978	0.1833	-0.202	-0.2041	-0.2063	-0.2267
	0.2	0.377	0.3701	0.3634	0.3185	-0.3772	-0.3844	-0.3921	-0.4698
	0.3	0.5235	0.5104	0.498	0.4184	-0.5238	-0.5377	-0.5526	-0.717
	0.4	0.6473	0.6276	0.609	0.4952	-0.6477	-0.6688	-0.6918	-0.9665
300	0.05	0.3043	0.2997	0.2952	0.2644	-0.3044	-0.3092	-0.3143	-0.3632
	0.1	0.555	0.5402	0.5261	0.4374	-0.5554	-0.5712	-0.5882	-0.7807
	0.2	0.9373	0.8965	0.859	0.6482	-0.9382	-0.9833	-1.0339	-1.8008
	0.3	1.229	1.1604	1.0989	0.7784	-1.2305	-1.3085	-1.3987	-3.2574
	0.4	1.4673	1.3712	1.2867	0.8701	-1.4693	-1.5811	-1.7137	-5.6074
400	0.05	0.3959	0.3882	0.3808	0.3314	-0.3961	-0.4041	-0.4127	-0.5005
	0.1	0.7005	0.6772	0.6553	0.5238	-0.701	-0.7262	-0.7538	-1.0992
	0.2	1.1433	1.0833	1.0292	0.7414	-1.1446	-1.2122	-1.2897	-2.7417
	0.3	1.4715	1.3745	1.2892	0.87	-1.4736	-1.5866	-1.7208	-5.7449
	0.4	1.7376	1.6047	1.4904	0.9594	-1.7405	-1.8992	-2.0934	-13.6635

Tablo 2. Çeşitli γ , $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$ ve ϵ değerleri için σ_{nr}/p gerilme değerleri ($\chi = 0.3$)

		σ_{nr}/p							
$\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$	γ	$\epsilon = p/E^{(1)}$							
		Çekme				Basınc			
		0.00005	0.005	0.01	0.05	-0.00005	-0.005	-0.01	-0.05
20	0.05	-0.0981	-0.0981	-0.098	-0.0979	0.0981	0.0981	0.0981	0.0982
	0.1	-0.137	-0.1369	-0.1369	-0.1365	0.137	0.137	0.1371	0.1376
	0.2	-0.1796	-0.1794	-0.1792	-0.1778	0.1796	0.1797	0.1799	0.1817
	0.3	-0.2075	-0.2071	-0.2068	-0.2042	0.2075	0.2079	0.2083	0.2117
	0.4	-0.2292	-0.2286	-0.2281	-0.2241	0.2292	0.2298	0.2304	0.2358
50	0.05	-0.1484	-0.1483	-0.1482	-0.1475	0.1484	0.1485	0.1486	0.1494
	0.1	-0.1924	-0.1921	-0.1918	-0.1895	0.1924	0.1928	0.1931	0.1961
	0.2	-0.2498	-0.2487	-0.2477	-0.2406	0.2498	0.2508	0.2519	0.2622
	0.3	-0.2944	-0.2925	-0.2906	-0.2775	0.2945	0.2965	0.2987	0.3193
	0.4	-0.3323	-0.3293	-0.3264	-0.3071	0.3324	0.3355	0.3388	0.3719
100	0.05	-0.1915	-0.1911	-0.1908	-0.1884	0.1915	0.1918	0.1922	0.1953
	0.1	-0.249	-0.2479	-0.2468	-0.2392	0.2491	0.2502	0.2514	0.2625
	0.2	-0.3362	-0.3327	-0.3294	-0.3073	0.3362	0.3399	0.3437	0.3828
	0.3	-0.408	-0.4017	-0.3956	-0.3572	0.4082	0.415	0.4222	0.5031
	0.4	-0.4699	-0.4603	-0.4514	-0.3966	0.4701	0.4803	0.4915	0.6258
300	0.05	-0.2943	-0.292	-0.2898	-0.2745	0.2944	0.2968	0.2993	0.3241
	0.1	-0.4081	-0.4011	-0.3945	-0.3531	0.4082	0.4156	0.4237	0.5149
	0.2	-0.5823	-0.5636	-0.5464	-0.4501	0.5827	0.6034	0.6267	0.9809
	0.3	-0.7202	-0.6886	-0.6603	-0.5135	0.7208	0.7567	0.7983	1.6573
	0.4	-0.8366	-0.7922	-0.753	-0.5609	0.8376	0.8894	0.9508	2.7612
400	0.05	-0.3351	-0.3314	-0.3278	-0.3042	0.3352	0.3391	0.3433	0.3861
	0.1	-0.4708	-0.46	-0.45	-0.3898	0.471	0.4826	0.4953	0.6555
	0.2	-0.6715	-0.6443	-0.6197	-0.4896	0.6721	0.7029	0.7381	1.4007
	0.3	-0.8267	-0.7824	-0.7435	-0.5528	0.8276	0.8792	0.9405	2.7844
	0.4	-0.957	-0.8959	-0.8433	-0.5997	0.9584	1.0315	1.1209	6.4639

Tablo 3. Çeşitli γ , $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$ ve ϵ değerleri için σ_{ne}/p gerilme değerleri ($\chi=0.3$)

		σ_{ne}/p							
$\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$	γ	$\epsilon = p/E^{(1)}$							
		Çekme				Basınç			
		0.00005	0.005	0.01	0.05	-0.00005	-0.005	-0.01	-0.05
20	0.05	-0.0065	-0.0065	-0.0065	-0.0064	0.0065	0.0065	0.0065	0.0066
	0.1	-0.0255	-0.0255	-0.0254	-0.0249	0.0255	0.0256	0.0257	0.0263
	0.2	-0.0632	-0.0629	-0.0626	-0.0605	0.0632	0.0635	0.0638	0.0663
	0.3	-0.0967	-0.0961	-0.0956	-0.0912	0.0967	0.0973	0.098	0.1033
	0.4	-0.1258	-0.1249	-0.1239	-0.1171	0.1258	0.1268	0.1278	0.1365
50	0.05	-0.038	-0.0378	-0.0377	-0.0368	0.038	0.0381	0.0382	0.0393
	0.1	-0.0897	-0.0892	-0.0887	-0.0848	0.0897	0.0902	0.0908	0.0955
	0.2	-0.1828	-0.1809	-0.1791	-0.166	0.1828	0.1847	0.1867	0.2048
	0.3	-0.2629	-0.2592	-0.2556	-0.2309	0.263	0.2667	0.2707	0.3085
	0.4	-0.3315	-0.3259	-0.3204	-0.2832	0.3316	0.3375	0.3438	0.4054
100	0.05	-0.0927	-0.0922	-0.0916	-0.0876	0.0927	0.0933	0.0938	0.0988
	0.1	-0.1925	-0.1905	-0.1885	-0.174	0.1926	0.1947	0.1969	0.2171
	0.2	-0.3641	-0.3573	-0.3507	-0.3066	0.3642	0.3714	0.3789	0.4552
	0.3	-0.5072	-0.4944	-0.4822	-0.4044	0.5075	0.5211	0.5357	0.6966
	0.4	-0.6283	-0.6091	-0.5909	-0.4797	0.6287	0.6494	0.6718	0.9402
300	0.05	-0.294	-0.2895	-0.285	-0.2545	0.2941	0.2989	0.3039	0.3524
	0.1	-0.5396	-0.525	-0.5112	-0.4239	0.5399	0.5554	0.5722	0.7615
	0.2	-0.914	-0.874	-0.8372	-0.6304	0.9148	0.9591	1.0087	1.7607
	0.3	-1.2007	-1.1335	-1.0731	-0.7588	1.2022	1.2786	1.3671	3.1898
	0.4	-1.4359	-1.3416	-1.2587	-0.85	1.438	1.5476	1.6777	5.4986
400	0.05	-0.384	-0.3764	-0.369	-0.3203	0.3841	0.3921	0.4006	0.4872
	0.1	-0.6821	-0.6591	-0.6376	-0.5084	0.6825	0.7073	0.7344	1.0736
	0.2	-1.1159	-1.0571	-1.004	-0.7218	1.1172	1.1835	1.2595	2.6832
	0.3	-1.4389	-1.3438	-1.2601	-0.8488	1.441	1.5518	1.6835	5.6307
	0.4	-1.7022	-1.5717	-1.4594	-0.9381	1.705	1.8609	2.0515	13.4111

4. Sonuç

Bu çalışmada, periyodik eğrilikli sonsuz uzunluklu içi boş liflerin düşük yoğunluklu olarak yer aldığı sonsuz elastik ortamda normal ve kayma gerilmeleri çalışılmıştır. Düşük yoğunluk kavramı, içi boş liflerin aralarındaki etkileşimin ihmal edilebileceği kadar birbirlerinden uzak olduğunu ifade etmektedir. Lif ve matris malzemelerinin farklı lineer elastik, homojen ve izotrop olduğu, lif yüzeyine dik kesitin içi çemberler olduğu (içi boş kısmı ve dolu kısmı için) ve bu çemberlerin yarıçaplarının lif boyunca değişmediği varsayılmıştır. İçi boş lifin orta çizgisinin bir düzlem üzerinde olduğu ve şekil değiştirmeden sonra da bu düzlem üzerinde kaldığı düşünülmüştür. Araştırma, parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin üç boyutlu doğrusal olmayan kesin denklemleri kullanılarak yapılmıştır. Ele alınan cisme, sonsuzda içi boş lifler yönünde düzgün dağılmış normal kuvvetin etkideği varsayılmıştır.

Arakesit yüzey denklemi ve yüzeyin normal vektör bileşenleri yazıldıktan sonra, her iki malzemede sağlanan denge denklemleri ve bünye deklemlerinin yazılması ve bunlara ideal temas koşullarının eklenmesi ile yukarıda verilen problemin matematiksel formülasyonu yapılmış ve sınır değer problemi haline getirilmiştir. Bu sınır değer problemi sınır formu pertürbasyon yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Bu amaçla, tüm bilinmeyenler küçük bir parametre cinsinden seri olarak yazılmış, bunlar ilgili yerlerine konup küçük parametrenin eşit kuvvetlerinin gruplandırılması ile her bir yaklaşım için sınır değer problemi elde edilmiştir. Bu yaklaşımlardan sıfıncı ve birinci yaklaşım çözümlere sayısal değerlere ulaşılmıştır.

Gerilme değerlerinin, lifin yarıçapı, lifin dolu kısmının kalınlığı, geometrik nonlineerite, elastisite sabitleri oranları parametrelerinden nasıl etkilendiğini gösteren sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Bunlar grafik ve tablolarla gösterilmiştir. Geometrik nonlineeritenin gerilme değerlerine etkisini göstermek için kullanılan yük değerleri, stabilite kaybına sebep olan kritik yük değerlerinden küçük seçilmiş, dolayısıyla stabilite kaybı öncesi gerilme dağılımı çalışılmıştır. Yük değerlerinin mutlak değerce değeri arttıkça çekmede gerilme değerlerinin azaldığı, basınçta ise gerilme değerlerinin arttığı gözlenmiştir. Ayrıca, lifin dolu kısmının kalınlığının artırılması ve elastisite sabitleri oranının artması gerilme değerlerini artırmaktadır. İçi boş lifin yarıçapı ile gerilme değerleri arasındaki ilişkinin monoton olmadığı da saptanmıştır.

Literatürde içi boş lifli kompozit malzemenin, lif kalınlığının ve elastisite sabitleri oranının belli değerlerinde nanokompozit olarak tanımlanacağı ifade edilmektedir. Bu durumda, içi boş lif karbon nano tüp olarak düşünülür. Bilindiği gibi, karbon nanotüpler yüksek teknolojik ürünlerde sıklıkla kullanılmaya başlanan yapı elemanlarındandır. Buna göre, bu çalışmada elastisite sabitleri oranının 300

ve 400 alınmasıyla elde edilen sayısal değerler, karbon nanotüpün gömülü olduğu elastik cisimde gerilme değerlerine karşılık gelmektedir.

Açıklama

Bu araştırma Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'nce desteklenmiştir. Proje No: 2014-07-03-DOP01

Kaynakça

- AHMAD, M , GÜVEN, G , SARIKAVAKLI, N . (2019). “Some Features of Doping of Nano–Graphite in Natural Coir Fibre Epoxy Composites” . *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi* , (15) , 491-498 . DOI: 10.31590/ejosat.540021
- AKBAROV, Surkay D. (2007). “Three-dimensional stability loss problems of the viscoelastic composite materials and structural members”. *International Applied Mechanics*. 43 (10):3-27.
- AKBAROV, Surkay D. (2012). *Stability Loss and Buckling Delamination: Three-Dimensional Linearized Approach for Elastic and Viscoelastic Composites*. Springer.
- AKBAROV, Surkay D. (2013). “Microbuckling of a Double-Walled Carbon Nanotube Embedded in an Elastic Matrix”. *International Journal of Solids and Structures*. 50: 2584- 2596.
- AKBAROV, Surkay D., KOSKER, Resat ve UCAN, Yasemen (2004). “Stress distribution in an elastic body with a periodically curved row of fibers”. *Mechanics of Composite Materials*. 40 (3): 191-202.
- AKBAROV, Surkay D., KOSKER, Resat ve UCAN, Yasemen (2006). “Stress distribution in a composite material with the row of anti-phase periodically curved fibers”. *International Applied Mechanics*. 42 (4): 486-493.
- AKBAROV, Surkay D., KOSKER, Resat ve UCAN, Yasemen (2010). “The Effect of the Geometrical Non-Linearity on the Stress Distribution in the Infinite Elastic Body with a Periodically Curved Row of Fibers”. *CMC:Computers, Materials, & Continua*. 17 (2): 77-102.
- AKBAROV, Surkay D., KOSKER, Resat ve UCAN, Yasemen (2016). “Influence of the interaction between fibers periodically located in a composite material on the distribution of stresses in it”. *Mechanics of Composite Materials*. 52 (2): 243-256.
- AKBAROV, Surkay D. ve KOSKER, Resat (2003). “On a stress analysis in the infinite elastic body with two neighbouring curved fibers”. *Composites Part B: Engineering*. 34 (2): 143-150.
- AKBAROV, Surkay D., GUZ, Aleksander N. (1985). “Method of Solving Problems in the Mechanics of Fiber Composites With Curved Structures”. *Soviet Applied Mechanics*. March: 777-785.
- AKBAROV, Surkay D., GUZ, Aleksander N. (2002). “Mechanics of curved composites (piecewise homogenous body model)”. *International Applied Mechanics*. 38 (12): 1415-1439.
- AKBAROV, Surkay D., GUZ, Aleksander N. (2000). *Mechanics of Curved Composites*. Kluwer Academic Publishers.
- CORTEN, H. T., BROUTMAN, L. J., & KROCH, R. H. (1967). *Modern Composite Materials. Micromechanics and Fracture Behavior of Composites*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- ÇALLIOĞLU, H , KAVLA, F . (2019). “Mechanical Behaviors of Composite Leaf Springs with Additive of Carbon Nanotubes and Chitosan” . *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi* , Special Issue, 270-283 . DOI: 10.31590/ejosat.638084
- GUZ, Aleksander N. (1999). *Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies*. Springer-Verlag. Berlin, Germany.
- GUZ, Aleksander N. (2003). “On one two-level model in the mesomechanics of compression fracture of Cracked Composites”. *International Applied Mechanics*. 39 (3):274-285.
- GUZ, Aleksander N. and DEKRET, V.A., (2008).” On two models in the three-dimensional theory of stability of composites”. *International Applied Mechanics*. 44 (8): 839-854.
- KASHTALYAN, M. Yu. (2005). “On deformation of ceramic cracked matrix cross-ply composites laminates”. *International Applied Mechanics*. 41 (1):37-47.
- KELLY, Anthony (1998), “Composite Materials: impediments do wider use and some suggestions to overcome these”, *Proceeding Book ECCM-8, 3-6 June, Napoles-Italy, Vol. I, pp. 15-18*.
- KOSKER, Resat ve AKBAROV, Surkay D. (2003). “Influence of the interaction between two neighbouring periodically curved fibers on the stress distribution in a composite material” . *Mechanics of Composite Materials*. 39 (2): 165-176.
- MALIGINO, A.R. & WARRIOR, N.A. & LONG, A.C. (2009). “Effect on inter-fibre spacing on damage evolution in unidirectional (UD) fibre-reinforced composites.”. *European Journal of Mechanics - A/Solids.*, 28: 768-776.
- QIAN, D.; DICKKEY, E. C.; ANDREWS, R.; RANTELL, T. (2000): “Load transfer and deformation mechanisms of carbon nanotube-polyethylene composites”. *Applied Physics Letters*. 76 (20): 2868-2870.
- ZHUK, Y.A. and GUZ, I.A. (2007). “ Features of plane wave propagation along the layers of a prestrained nanocomposite”. *International Applied Mechanics*. 43 (4): 361-379.